



# ***Punts que exploten (Exploding Dots™)***

## **MATERIALS**

### **Experiència 6:**

# **Totes les bases, i totes alhora: els polinomis**

Material A: <i>La divisió en qualsevol base</i>	2
Solucions a les preguntes de «Material A»	3
Material B: <i>Problema i solució</i>	4
Solucions a les preguntes de «Material B»	5
Material C: <i>Exploracions brutals</i>	6

## Punts que exploten

### Experiència 6: Totes les bases, i totes alhora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material B: La divisió en qualsevol base

Les operacions  $276 \div 12$  i  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$  són idèntiques!

En una màquina  $1 \leftarrow 10$

$$\begin{array}{r} 276 \div 12 \\ = 23 \end{array}$$



**MATEIXA IMATGE!**

En una màquina  $1 \leftarrow x$

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) \\ = 2x + 3 \end{array}$$

**Aquí teniu uns enunciats que podeu plantejar, si voleu:**

- Calculeu  $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$ .
  - Calculeu  $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$ .

Si us dic que  $x$  és 10 en totes dues operacions, quines dues divisions acabeu de calcular en aritmètica normal?

- Aquí tenim una divisió de polinomis en forma de fracció. Podeu fer-la? (Hi ha alguna petita dificultat que calgui tenir en compte?)

$$\frac{(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3)}$$

- Demostreu que  $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$  equival a  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ .
  - Quin és el resultat amb  $x = 10$ ?
  - Quin és el resultat amb  $x = 2$ ?
  - Quin és el resultat quan  $x$  equival a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 11?
  - Quin és el resultat amb  $x = 0$ ?
  - Quin és el resultat amb  $x = -1$ ?



## Solucions a les preguntes de «Material A»

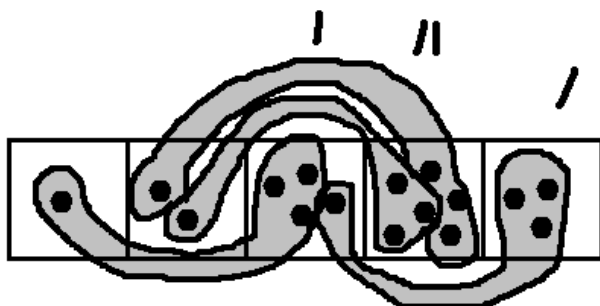
1.

a)  $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1.$

b)  $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3.$

I si resulta que  $x$  és 10, el que acabem de calcular és  $23541 \div 21 = 1121$  i  $13653 \div 111 = 123$ .

2. Sí que podem. La solució és  $x^2 + 2x + 1$ .



3.

a) Amb  $x = 10$  seria  $14641 \div 11 = 1331$ .

b) Amb  $x = 2$  seria  $81 \div 3 = 27$ .

c) Amb  $x = 3$  seria  $256 \div 4 = 64$ .

Amb  $x = 4$  seria  $625 \div 5 = 125$ .

Amb  $x = 5$  seria  $1296 \div 6 = 216$ .

Amb  $x = 6$  seria  $2401 \div 7 = 343$ .

Amb  $x = 7$  seria  $4096 \div 8 = 512$ .

Amb  $x = 8$  seria  $6561 \div 9 = 729$ .

Amb  $x = 9$  seria  $10000 \div 10 = 1000$ .

Amb  $x = 11$  seria  $20736 \div 12 = 1728$ .

d) Amb  $x = 0$  seria  $1 \div 1 = 1$ .

e) Amb  $x = -1$  seria  $0 \div 0 = 0$ . Mmm. Que estrany...! (Podem tenir una màquina  $1 \leftarrow 0$ ?)



## Punts que exploten

### Experiència 6: Totes les bases, i totes alhora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material B: Problema i solució

Podem treballar amb antipunts fins i tot en la divisió de polinomis.

$$x^3 - 3x + 2 =$$

$$x+2 =$$

Aquí teniu uns enuncisats que podeu plantejar, si voleu:

1. Calculeu  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ .
2. Determineu  $\frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3}$ .
3. Si podeu fer aquesta operació,  $\frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1}$ , segurament les podreu fer totes!
4. Aquesta és superdivertida:  $\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$ .

**A part:** Hi ha alguna manera fàcil de treballar amb el mètode de punts i caselles en paper? En lloc de dibuixar caselles i punts, podem treballar amb taules de nombres que incloguin els coeficients? (El terme  *sintètic*  s'aplica sovint a algorismes en què s'utilitzen un o dos passos menys dels que estem veient aquí.)

5. Podeu deduir quina serà la solució de  $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$  abans de fer l'operació?
6. Calculeu  $\frac{x^4}{x^2 - 3}$ .
7. Proveu amb aquesta, que és una bogeria:  $\frac{5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7}{x^3 - 4x + 1}$ .

Si la feu amb paper i llapis, en algun moment estareu intentant dibuixar 84 punts. És fàcil i ràpid escriure el nombre 84? De fet, què us sembla escriure únicament nombres, sense haver de dibuixar cap punt?



## Solucions a les preguntes de «Material B»

1.  $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = x - 2x + 1.$

2.  $\frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3} = 2x^2 - 4x + 1.$

3.  $\frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1} = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1.$

4.  $\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$

5. Com que sabem que  $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$ , estic segur que  $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$  dona  $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$ . És així? I com interpreteu el residu?

6.  $\frac{x^4}{x^2 - 3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2 - 3}.$

7.  $5x^2 - 2x + 21 + \frac{-14x^5 + 82x - 14}{x^3 - 4x + 1}.$



## Punts que exploten

### Experiència 6: Totes les bases, i totes alhora: els polinomis

Podeu accedir als vídeos de totes les lliçons de *Punts que exploten* aquí:  
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### Material C: Exploracions brutals

A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Divertiu-vos!

#### EXPLORACIÓ 1: PODEM EXPLICAR UN TRUC ARITMÈTIC?

Us presento una manera atípica de dividir per nou.

Per calcular, per exemple,  $21203 \div 9$ , llegiu «21203» d'esquerra a dreta i aneu calculant les sumes parcials dels dígit:

$$\begin{array}{rcl} 2 & & = 2 \\ 2 + 1 & & = 3 \\ 2 + 1 + 2 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 + 3 & & = 8 \end{array}$$

I, després, llegiu en veu alta la solució

$$21203 \div 9 = 2355 R 8$$


De la mateixa manera,

$$1033 \div 9 = 1 \mid 1 + 0 \mid 1 + 0 + 3 \mid R 1 + 0 + 3 + 3 = 114 R 7$$

i

$$2222 \div 9 = 246 R 8$$

Podeu explicar per què funciona aquest truc?

Aquest és el mètode que seguiria jo: per al primer exemple, dibuixeu una imatge de 21203 en una màquina  $1 \leftarrow 10$ , però penseu en el nou com  $10 - 1$ . És a dir, busqueu còpies de  a la imatge.



**EXPLORACIÓ 2: PODEM EXPLORAR LA TEORIA DE NOMBRES?**

Utilitzeu una màquina  $1 \leftarrow x$  per calcular:

a)  $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$       b)  $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$       c)  $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$       d)  $\frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

Podeu veure ara que  $\frac{x^{\text{nombre}} - 1}{x - 1}$  sempre tindrà una solució ben bonica sense residu?

Una altra manera d'expressar-ho és que

$$x^{\text{nombre}} - 1 = (x - 1) \times (\text{alguna cosa})$$

Per exemple, ja deveu haver vist a l'operació c que  $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ . Això significa que podem dir, per exemple, que segur que  $17^6 - 1$  és múltiple de 16! Com? Decideix que  $x = 17$  en aquesta fórmula per obtenir

$$17^6 - 1 = (17 - 1) \times (\text{alguna cosa}) = 16 \times (\text{alguna cosa})$$

- a) Expliqueu per què  $999^{100} - 1$  ha de ser múltiple de 998.
- b) Podeu explicar per què  $2^{100} - 1$  ha de ser múltiple de 3, i múltiple de 15, i múltiple de 31, i múltiple de 1023? (Pista:  $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$ , i així successivament.)
- c) És  $x^{\text{nombre}} - 1$  sempre múltiple de  $x + 1$ ? A vegades, si més no?
- d) El nombre  $2^{100} + 1$  no és primer. És múltiple de 17. Podeu demostrar-ho d'alguna manera?

