



Uplifting Mathematics for All

Puntos que explotan (Exploding Dots™)

MATERIALES

Experiencia 6:

Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Material A: <i>La división en cualquier base</i>	2
Soluciones a las preguntas de «Material A»	3
Material B: <i>Problema y solución</i>	4
Soluciones a las preguntas de «Material B»	5
Material C: <i>Exploraciones brutales</i>	6

Puntos que explotan

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La división en cualquier base

¡Las operaciones $276 \div 12$ i $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2)$ son idénticas!

En una màquina $1 \leftarrow 10$

$$\begin{array}{r} 276 \div 12 \\ = 23 \end{array}$$



En una màquina $1 \leftarrow x$

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) \\ = 2x + 3 \end{array}$$

¡MISMA IMAGEN!

Aquí tenéis unos enunciados que podéis plantear, si queréis:

- Calculad $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1)$.
 - Calculad $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1)$.

Si os digo que x es 10 en las dos operaciones, ¿qué dos divisiones acabáis de calcular en aritmética normal?

- Aquí tenemos una división de polinomios en forma de fracción. ¿Podéis hacerla? (¿Hay alguna pequeña dificultad que se deba tener en cuenta?)

$$\frac{(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 3)}{(x^2 + 3)}$$

- Demostrad que $(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) \div (x + 1)$ equivale a $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

 - ¿Cuál es el resultado cuando $x = 10$?
 - ¿Cuál es el resultado cuando $x = 2$?
 - ¿Cuál es el resultado cuando x equivale a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 11?
 - ¿Cuál es el resultado cuando $x = 0$?
 - ¿Cuál es el resultado cuando $x = -1$?



Soluciones a las preguntas de «Material A»

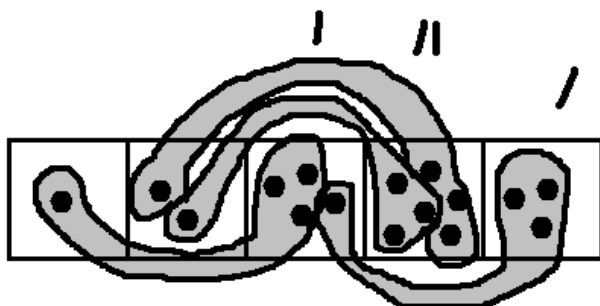
1.

a) $(2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 1) \div (2x + 1) = x^3 + x^2 + 2x + 1.$

b) $(x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3) \div (x^2 + x + 1) = x^2 + 2x + 3.$

Y si resulta que x es 10, lo que acabamos de calcular es $23541 \div 21 = 1121$ y $13653 \div 111 = 123$.

2. Sí que podemos. La solución es $x^2 + 2x + 1$.



3.

a) Con $x = 10$ sería $14641 \div 11 = 1331$.

b) Con $x = 2$ sería $81 \div 3 = 27$.

c) Con $x = 3$ sería $256 \div 4 = 64$.

Con $x = 4$ sería $625 \div 5 = 125$.

Con $x = 5$ sería $1296 \div 6 = 216$.

Con $x = 6$ sería $2401 \div 7 = 343$.

Con $x = 7$ sería $4096 \div 8 = 512$.

Con $x = 8$ sería $6561 \div 9 = 729$.

Con $x = 9$ sería $10000 \div 10 = 1000$.

Con $x = 11$ sería $20736 \div 12 = 1728$.

d) Con $x = 0$ sería $1 \div 1 = 1$.

e) Con $x = -1$ sería $0 \div 0 = 0$. Mmm. ¡Qué raro...! (¿Podemos tener una máquina $1 \leftarrow 0$?)



Puntos que explotan

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: Problema y solución

Podemos trabajar con antipuntos incluso en la división de polinomios.

$$x^3 - 3x + 2 =$$

$$x+2 =$$

Aquí tenéis unos enunciados que podéis plantear, si queréis:

1. Calculad $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1}$.
2. Determinad $\frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3}$.
3. Si podéis hacer esta operación, $\frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1}$, ¡seguramente podréis hacerlas todas!
4. Esta es superdivertida: $\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1}$.

Aparte: ¿Hay alguna manera fácil de trabajar con el método de puntos y casillas en papel? En vez de dibujar casillas y puntos, ¿podemos trabajar con tablas de números que incluyan los coeficientes? (El término *sintético* se aplica a menudo a algoritmos en los que se usan uno o dos pasos menos de los que estamos viendo aquí.)

5. ¿Podéis deducir cuál será la solución de $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ antes de hacer la operación?
6. Calculad $\frac{x^4}{x^2 - 3}$.
7. Probad con esta, que es una locura: $\frac{5x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 7}{x^3 - 4x + 1}$.

Si la hacéis con papel y lápiz, en algún momento estaréis intentando dibujar 84 puntos. ¿Es fácil y rápido escribir el número 84? De hecho, ¿qué os parece escribir solo números, sin tener que dibujar ningún punto?



Soluciones a las preguntas de «Material B»

1. $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} = x - 2x + 1.$

2. $\frac{4x^3 - 14x^2 + 14x - 3}{2x - 3} = 2x^2 - 4x + 1.$

3. $\frac{4x^5 - 2x^4 + 7x^3 - 4x^2 + 6x - 1}{x^2 - x + 1} = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 1.$

4. $\frac{x^{10} - 1}{x^2 - 1} = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1.$

5. Como sabemos que $(2x^2 + 7x + 6) \div (x + 2) = 2x + 3$, estoy seguro de que $(2x^2 + 7x + 7) \div (x + 2)$ da $2x + 3 + \frac{1}{x+2}$. ¿Es así? ¿Y cómo interpretáis el resto?

6. $\frac{x^4}{x^2 - 3} = x^2 + 3 + \frac{9}{x^2 - 3}.$

7. $5x^2 - 2x + 21 + \frac{-14x^5 + 82x - 14}{x^3 - 4x + 1}.$



Puntos que explotan

Experiencia 6: Todas las bases, y todas a la vez: los polinomios

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material C: Exploraciones brutales

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. ¡Divertíos!

EXPLORACIÓN 1: ¿PODEMOS EXPLICAR UN TRUCO ARITMÉTICO?

Os presento una forma atípica de dividir por nueve.

Para calcular, por ejemplo, $21203 \div 9$, leed «21203» de izquierda a derecha e id calculando las sumas parciales de los dígitos:

$$\begin{array}{rcl} 2 & & = 2 \\ 2 + 1 & & = 3 \\ 2 + 1 + 2 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 & & = 5 \\ 2 + 1 + 2 + 0 + 3 & & = 8 \end{array}$$

Y después leed en voz alta la solución:

$$21203 \div 9 = 2355 R 8$$


Del mismo modo,

$$1033 \div 9 = 1 \mid 1 + 0 \mid 1 + 0 + 3 \mid R 1 + 0 + 3 + 3 = 114 R 7$$

y

$$2222 \div 9 = 246 R 8$$

¿Podéis explicar por qué funciona este truco?

Este es el método que seguiría yo: para el primer ejemplo, dibujad una imagen de 21203 en una máquina $1 \leftarrow 10$, pero pensad en el nueve como $10 - 1$. Es decir, buscad copias de  en la imagen.



EXPLORACIÓN 2: : ¿PODEMOS EXPLORAR LA TEORÍA DE NÚMEROS?

Utilizad una máquina $1 \leftarrow x$ para calcular:

a) $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\frac{x^3 - 1}{x - 1}$ c) $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$ d) $\frac{x^{10} - 1}{x - 1}$

¿Podéis ver ahora que $\frac{x^{\text{número}} - 1}{x - 1}$ siempre tendrá una bonita solución sin resto?

Otro modo de expresarlo es que

$$x^{\text{número}} - 1 = (x - 1) \times (\text{algo})$$

Por ejemplo, ya habréis visto en la operación *c* que $x^6 - 1 = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. Esto significa que podemos decir, por ejemplo, que ¡seguro que $17^6 - 1$ es múltiplo de 16! ¿Cómo? Decide que $x = 17$ en esta fórmula para obtener

$$17^6 - 1 = (17 - 1) \times (\text{algo}) = 16 \times (\text{algo})$$

- a) Explicad por qué $999^{100} - 1$ tiene que ser múltiplo de 998.
- b) ¿Podéis explicar por qué $2^{100} - 1$ tiene que ser múltiplo de 3, y múltiplo de 15, y múltiplo de 31, y múltiplo de 1023? (Pista: $2^{100} = (2^2)^{50} = 4^{50}$, y así sucesivamente.)
- c) ¿Es $x^{\text{número}} - 1$ siempre múltiplo de $x + 1$? ¿A veces, al menos?
- d) El número $2^{100} + 1$ no es primo. Es múltiplo de 17. ¿Podéis demostrarlo de algún modo?

