OBRA SOCIAL
EL ALMA DE "LA CAIXA"

Dossier educativo

# Cuando los números cantan

## Taller de música

Obra Social
Fundación "la Caixa"

# Índice



Edita: Fundación "la Caixa"
Textos: Josep-Maria Roger
Diseño gráfico: WHADS|ACCENT

**Cuando los números cantan** es un taller que nos propone explorar algunos de los lugares comunes, las intersecciones, entre dos conocimientos a menudo disociados: los números y los sonidos.

La música y las matemáticas son dos lenguajes, aunque aparentemente lejanos, muy relacionados entre sí. Un acorde o una melodía corresponden a un hecho físico, a una proporción matemática estudiada desde Pitágoras. Cuando relacionamos los números y los sonidos nos podemos dar cuenta de que la creación musical, aunque sea de diferentes culturas, épocas y estilos, se parece a la creación matemática en la estructura y la proporción, en la belleza formal, en las expectativas...

## ¿Para quién?

Este taller está pensado para un grupo-clase de alumnos de secundaria, bachillerato y ciclos formativos. Quiere incidir en ampliar el papel de la música en secundaria como un puente entre conocimientos y, al mismo tiempo, invitar al profesorado de matemáticas a participar de la música como una herramienta formativa más de su especialidad.

## ¿Con qué objetivos?

Fundamentalmente:

1. Relacionar aquellas intersecciones que nos ha parecido que tenían que ser las primeras a tratar entre la música y las matemáticas:
   - **la media aritmética**
   - **el ritmo**
   - **el número de oro**
2. Experimentar con unos símbolos abstractos que expresan ideas y hechos científicos (matemáticas) o sentimientos y emociones (música).
3. Valorar la importancia de la coherencia interna de una obra (la relación de las partes con el todo, la proporción, la belleza formal...).
4. Incentivar la creación de expectativas, en nuestro caso, aplicadas a un breve proyecto musical.

# ¿Sabíais que en nuestra música preferida está Pitágoras?

Si os gusta escuchar músicas de estilos muy diferentes, sea pop, rock, jazz, clásica o africana... probablemente lo que más os atraiga sea poder disfrutar de una música para cada momento, en toda su diversidad, ya que no parecen tener nada en común. El ritmo es completamente distinto de una a otra, la melodía, por descontado..., los instrumentos también... Pero hay un aspecto que las une..., hay unos sonidos básicos que comparten.

Son los sonidos que se ha ido viendo que combinan mejor, que suenan mejor al oído (las denominadas *consonancias*) y que más hemos utilizado para expresarnos a través de la música.

La primera persona de la que se sabe que estudió por qué unos sonidos combinan mejor que otros entre sí fue **Pitágoras** (s. VI aC). El pensador romano Boeci (s. VI), en el tratado *De Institutione Musica* Y, 10-11, explica que Pitágoras, al pasar delante de una herrería, se dio cuenta de que los yunques sobre los que golpeaban los herreros hacían sonidos diversos, y que esos sonidos eran consonantes. Esto le llevó a hacer varios experimentos: con diferentes pesos atados a cuerdas, con flautas, con vasos de agua, etc.

Pitágoras y sus discípulos hicieron varios experimentos, uno de ellos con una cuerda mantenida en tensión constante y haciéndola vibrar tanto en toda la longitud como por la mitad, y el resultado era que en esa mitad de cuerda se obtenía el mismo sonido, pero más agudo, respecto a la cuerda entera; el intervalo entre los dos sonidos era —y es— la octava (1/2). Del mismo modo, dividiendo la cuerda en tres partes iguales y haciendo sonar dos terceras partes, el intervalo resultante entre este fragmento y la cuerda entera es la quinta (2/3); y dividiéndola en cuatro partes y haciendo sonar tres se obtiene la cuarta (3/4). Si lo aplicamos a un instrumento, la longitud entera es, pongamos por caso, un Do; la mitad, el Do más agudo (octava); y, en medio, tendríamos el Fa (cuarta) y el Sol (quinta).

Estas relaciones de longitud de la cuerda obedecían a unas proporciones matemáticas, a la relación entre dos números, las denominadas **medias**. Y así establecieron la relación entre los números y la armonía musical.

Lo mismo sucede con la naturaleza de la voz. La consonancia que resulta de escuchar una melodía cantada por un tenor y una soprano es la octava, la relación de longitud 1/2; si esta melodía del tenor la tiene que cantar un bajo, éste lo hará cinco notas más graves, una quinta, la relación 2/3; y si la canta una contralto, respecto al tenor, lo hará cuatro notas más agudas, una cuarta, la relación de 3/4.

Los intervalos sucesivos de quinta (Do, Sol, Re, La, Mi...) son las notas que dispuestas gradualmente proporcionan las diferentes escales musicales, y también tienen una importancia decisiva en el tipo de sonido de los instrumentos.

## ¡El ritmo… aritmético!

El ritmo se mide en conjuntos de un número indeterminado de pulsaciones (el compás de 2, de 3, de 4…): es **aritmética en el tiempo**. Cada pulsación se puede hacer más lenta multiplicándola o más rápida dividiéndola, sin pararse de principio a fin.
Si tocamos al mismo tiempo dos conjuntos de pulsaciones, dos compases diferentes, como uno de 3 y otro de 4, de ello resulta una pulsación coincidente cada 12 pulsaciones, que es su mínimo común múltiplo.

## La música «divinamente» organizada

Una de las características de las grandes obras musicales es la conexión de cada una de las partes con el todo (cuando un ritmo o un tema melódico va apareciendo de vez en cuando, modificado, desarrollado, tocado por instrumentos diferentes, aumentando o disminuyendo de intensidad…), es decir, la relación que hace que el resultado de una obra, cuando está bien construida, sea más que la suma de las partes, que el conjunto se convierta en una estructura extraordinaria cuando se trata de una obra maestra.

A menudo estas proporciones están presentes en las mejores obras de todas las artes. Pero resulta que hay un modelo de proporción «ideal» que nos ha dado la naturaleza y que se puede ver perfectamente en el crecimiento de las plantas, los animales… El desarrollo físico de las personas también se ajusta a esta proporción: una proporción denominada «divina» cuando se creía que venía dada por los dioses, o «áurea» (el número de «oro») cuando se ha considerado este mineral como el más preciado…

Esta proporción se representa con $\phi$=1'618 y además de en muchas pinturas y esculturas, en arquitectura, etc., también la podemos encontrar en las composiciones musicales de Beethoven, Mozart, Debussy, Bartók…

Podremos comprobarlo mediante la experiencia de componer una pieza breve, formalmente coherente, que cree expectativas y que relacione las partes con el todo, utilizando una serie de sonidos programados con ordenador, con el objetivo de llegar a un punto culminante (la proporción áurea).

## Para los que quieran más

La media aritmética la utilizamos cada día, y se conoce como «la media», a secas: la mitad de la suma. Pero… para los que quieran saber más (*)… es posible que no conozcáis tan bien la media armónica. Ésta se atribuye a un destacado miembro de la escuela pitagórica, Hipes, y, más complicada, se suele definir así: «El primer número supera al segundo en una fracción de sí mismo; mientras que el segundo supera al tercero en la misma fracción del tercero.»

Veamos un ejemplo con los números 12, 8 y 6.

8 es la media armónica de 12 y 6, porque el 12 supera al 8 en 4, que es un tercio de 12; y el 8 supera al 6 en 2, que es un tercio de 6.

$$\boxed{a - b : a = b - c : c}$$

$$(a-b)\,c = a\,(b-c) \ // \ ac - bc = ab - ac \ // \ 2ac = bc + ab \ // \ 2ac = b\,(c+a) \ // \ b = 2ac : a+c$$

(*) El profesor Ramon Nolla, del IES Pons d'Icart de Tarragona, ha hecho un trabajo muy interesante sobre la media armónica con sus alumnos. Lo podéis consultar en:
http://www.xtec.net/~rnolla/apunts/MitjHarmoni.pdf

## Para terminar...

El premio Nobel de Física C. Cohen-Tannoudji explica que Einstein a menudo había escogido entre dos ecuaciones diferentes que explicaban un mismo fenómeno y que siempre se había decidido por la ecuación más bonita. «¿Y cuál es la ecuación más bonita?», le preguntaron al célebre descubridor de la teoría de la relatividad, respondió:

**«La ecuación más bonita
es la que dice más y mejor
con menos signos.»**

Con la música pasa algo parecido. A menudo, las grandes obras se han creado a partir de motivos cortos y sencillos (¿quién no recuerda el ritmo de la entrada de la 5ª Sinfonía de Beethoven, con el ¡toc, toc, toc, tooooc!?)
.
En el terreno de la creación, matemáticos y compositores hacen descubrimientos que, al principio, no saben para qué servirán; sus hallazgos quizá no serán reconocidos hasta pasados muchos años... **Cuando los números cantan** es un taller de música que ya se justificaría si pudiera ser recordado simplemente por uno solo de los aspectos experimentados.

# Bibliografía recomendada


- **Alsina, C.** *Estimar les matemátiques.* Columna assaig.
- **Blaking, J.** *Fins a quin punt l'home és músic.* Eumo ed.
- **Bult, B./Hobbs, D.** *Léxico de Matemáticas.* Akal diccionarios.
- **Candé, R.** *Diccionari de la música.* Edicions 62.
- **Cohen-Tannoudji, C.** *Entrevista en La Vanguardia,* 19.04.04.
- **Donington, R.** *Los instrumentos de música.* Alianza editorial.
- **Enzensberger, H. M.** *El diable dels nombres.* Ed. Siruela.
- **Goldáraz Gaínza, J. J.** *Afinación y Temperamento en la música occidental.* Alianza Música.
- **González Urbaneja, P. M.** *Pitágoras. El filósofo del número.* Nivola.
- **Guedj, D.** *El teorema del lloro.* Ed. Empúries.
- **Hoppin, Richard H. (ed.)** *Medieval Music. The Anthology of Music.* Oxford University Press.
- **Nolla, Ramon.** «Apunt sobre la mitjana harmònica». IES Pons d'Icart, Tarragona, 2006.
  *http://www.xtec.net/~rnolla/apunts/MitjHarmoni.pdf*
- **Varios autores.** *Fotografiando las matemáticas*. Ed. Carroggio.