

Punts que exploten

Experiència 1

Les màquines

Benvinguts a un viatge!

És un viatge a les matemàtiques basat en una història que he fet jo, James, i que és falsa.

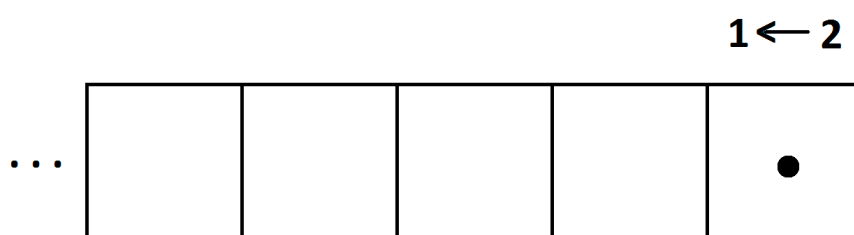
De petit vaig inventar una màquina —mentida— que no és més que una sèrie de caselles ampliable cap a l'esquerra fins on vulgueu.

A aquesta màquina meva li vaig posar un nom, *màquina $1 \leftarrow 2$* , ambdós nombres escrits i llegits a la inversa («[màquina] dos-u»), que és més divertit. (Com que era un nen, no n'era conscient.)



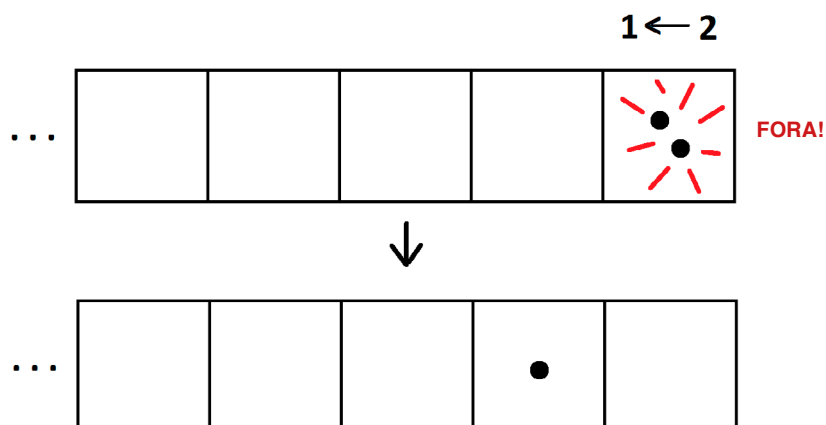
I què es pot fer amb aquesta màquina? Posar-hi punts. Els punts sempre van a la casella de més a la dreta.

Hi poso un punt i, bé, no passa res: es queda tal qual. Una mica avorrit...



Però si hi poso un segon punt —sempre a la casella de més a la dreta—, la cosa es torna interessant.

Quan tenim dos punts en una casella, exploten i desapareixen —FORA!— i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra.



(Veieu ara per què vaig anomenar-la *màquina* $1 \leftarrow 2$, escrita d'aquesta manera més divertida?)

Veiem que dos punts situats a la màquina generen un punt seguit de zero punts.

Si hi posem un tercer punt —sempre a la casella de més a la dreta—, tenim un punt seguit d'un punt.

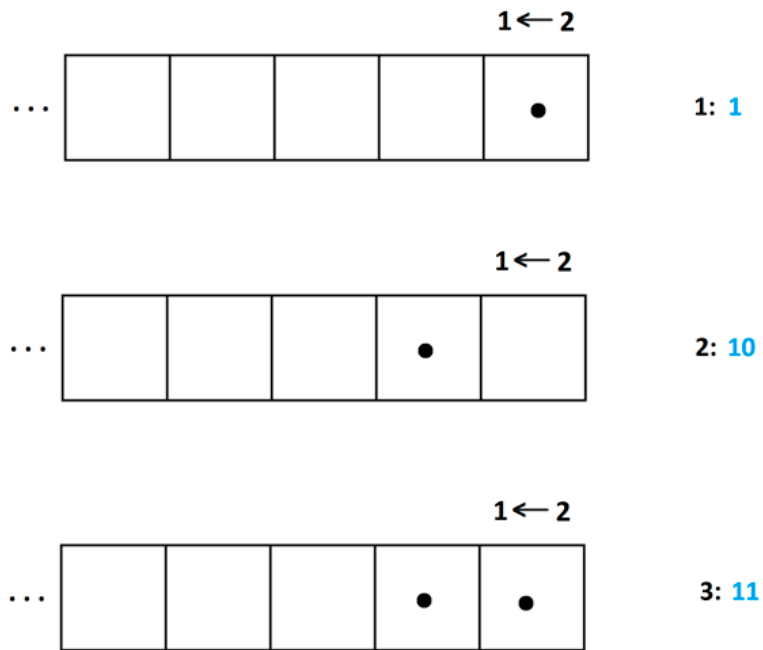


Vaig veure, en la meva història falsa, que aquesta màquina assignava codis als nombres.

Si poso un punt a la màquina, continua sent un punt. Suposem que el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 1 és 1.

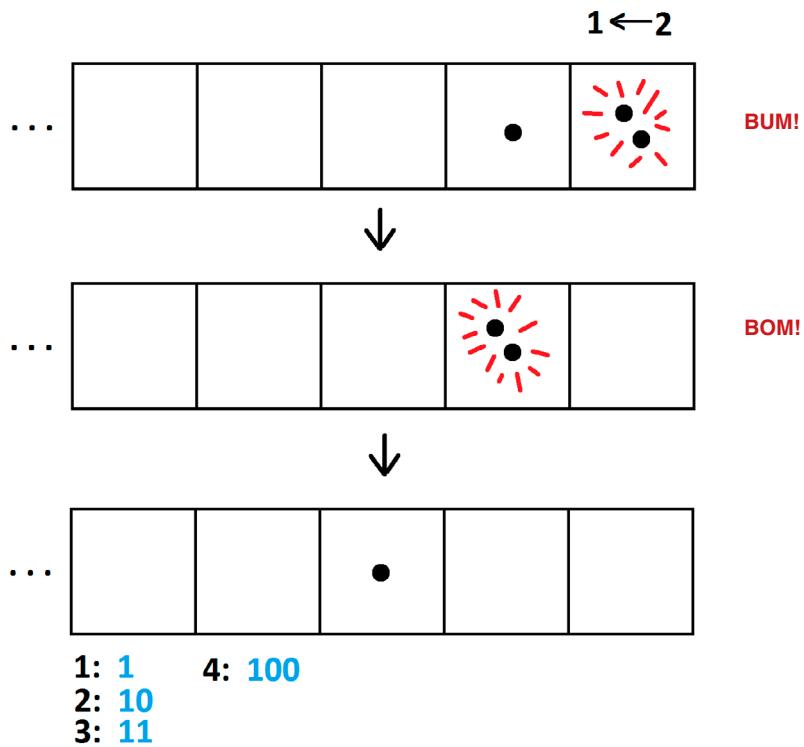
Si hi poso dos punts, un darrere l'altre, aquests generen un punt en una casella seguit de zero punts. Suposem que el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 2 és 10.

Si poso un tercer punt a la màquina, tenim el codi 11 per al 3.



Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al 4?

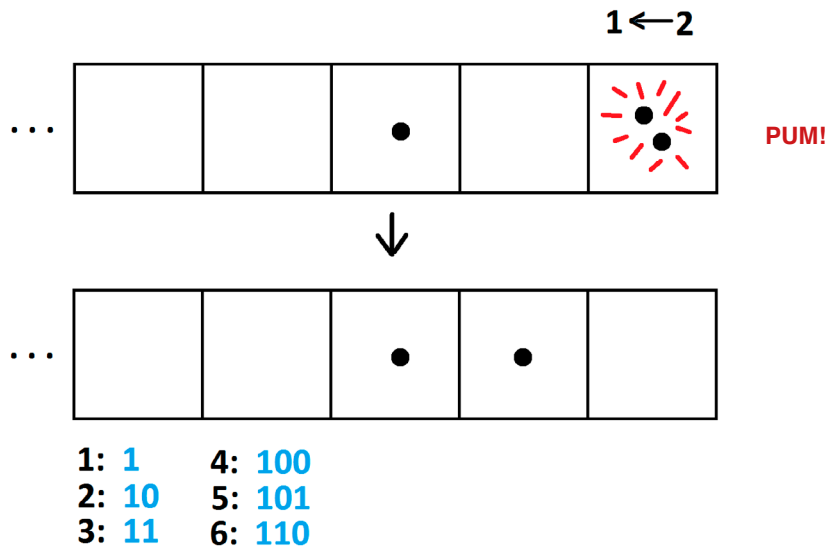
I posar un quart punt en la màquina és especialment interessant: ens esperen moltes explosions!



El codi $1 \leftarrow 2$ per al 4 és 100.

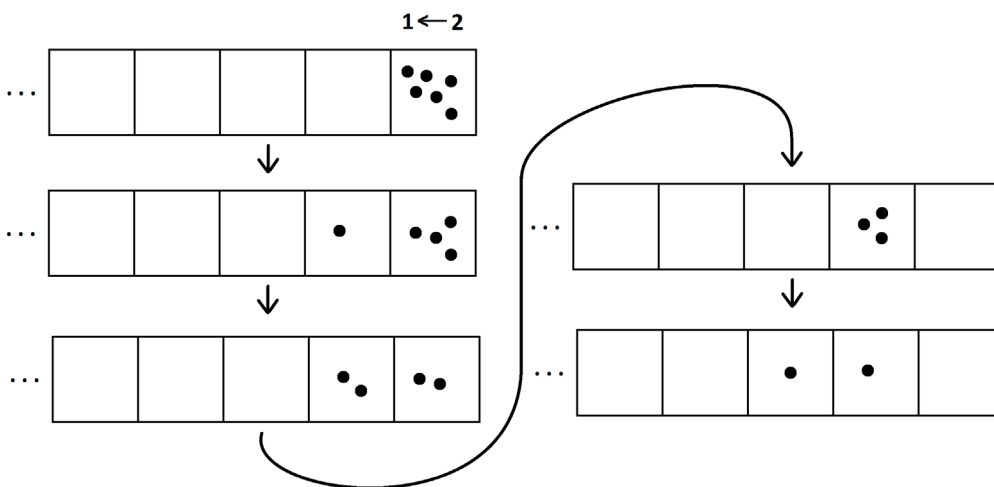
Quin serà el codi per al 5 ? Ho veieu, que és el 101?

I el codi per al 6? Si afegim un altre punt al codi per al 5, tenim 110 per al 6.



De fet, també podem tenir aquest codi per al 6 si buidem la màquina i, a continuació, hi posem sis punts tots alhora. Cada parell de punts explotarà, un darrere l'altre, i generarà un punt a la casella de l'esquerra.

Aquí teniu una possible sèrie d'explosions (sense els efectes de so!).



Us surt el mateix codi final, 110, si feu les explosions en un ordre diferent?

I aquí teniu algunes preguntes que podeu intentar respondre, si voleu. Les meves solucions apareixen al final d'aquest capítol.

1. a) Quin és el codi de la màquina $1 \leftarrow 2$ per al nombre 13?
(És 1101. Podeu obtenir aquesta resposta?)
b) Quin és el codi per al 50 en aquesta màquina? (Vinga!)
2. Podria un nombre tenir el codi 100211 en una màquina $1 \leftarrow 2$ si, sempre que podem, optem per fer explotar els punts?
3. A quin nombre correspon el codi 10011 en una màquina $1 \leftarrow 2$?

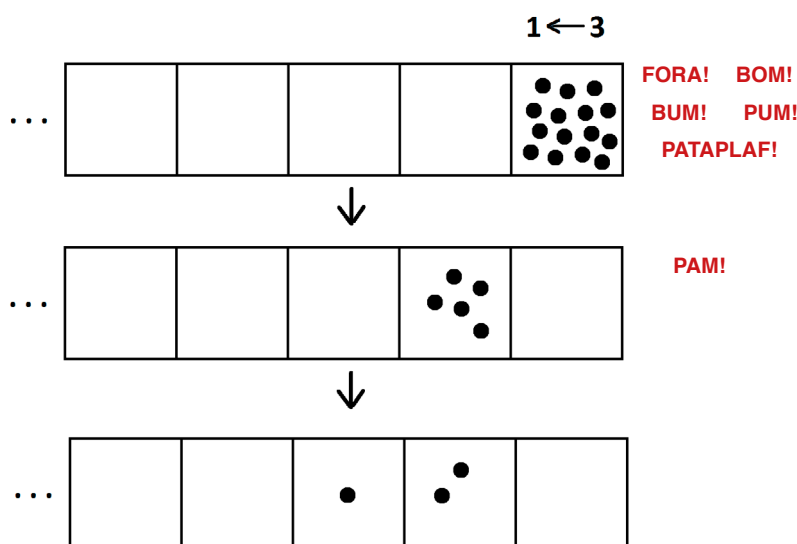
Hores i hores de diversió jugant amb codis en una màquina $1 \leftarrow 2$.

I un dia vaig tenir una sorprenent revelació!

Altres màquines

Vaig veure que, a més de jugar amb la màquina $1 \leftarrow 2$, podia jugar amb una màquina $1 \leftarrow 3$ (també escrit i llegit cap enrere: «[màquina] tres-u»). Llavors, quan tenim tres punts en una casella, exploten i desapareixen, i són substituïts per un punt que va a la casella de l'esquerra.

Això és el que passa amb quinze punts en una màquina $1 \leftarrow 3$:



Primer hi ha cinc explosions a la primera casella, i cada explosió genera un punt a la segona casella cap a l'esquerra. A continuació, tres d'aquests punts exploten i desapareixen. Això fa que en quedin dos punts i que n'aparegui un de nou, un lloc cap a l'esquerra. Així obtenim el codi 120 per al nombre 15 en una màquina $1 \leftarrow 3$.

A continuació trobareu més preguntes sobre les quals, si voleu, podeu reflexionar:

4. a) Mostrar que el codi per al 4 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és 11.
 b) Mostrar que el codi per al 13 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és 111.
 c) Mostrar que el codi per al 20 en una màquina $1 \leftarrow 3$ és 202.
5. Pot un nombre tenir el codi 2041 en una màquina $1 \leftarrow 3$? En cas afirmatiu, aquest codi seria «estable»?
6. Quin nombre té el codi 1022 en una màquina $1 \leftarrow 3$?

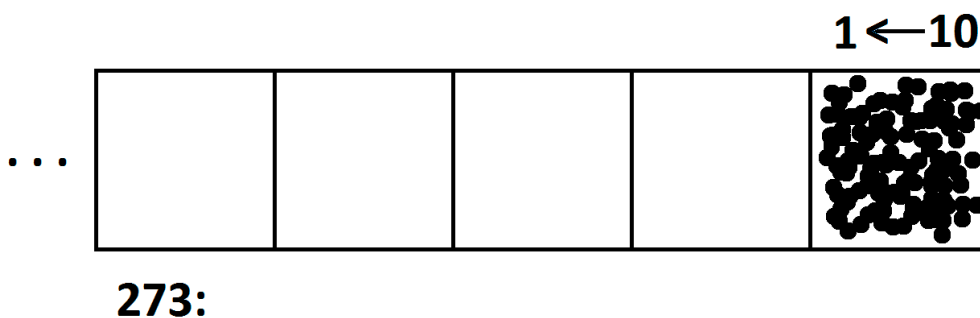
I podem seguir així!

7. Quina penseu que és la regla per a una màquina $1 \leftarrow 4$?
 Quin és el codi $1 \leftarrow 4$ per al nombre 13?
8. Quin és el codi $1 \leftarrow 5$ per al nombre 13?
9. Quin és el codi $1 \leftarrow 9$ per al nombre 13?
10. Quin és el codi $1 \leftarrow 5$ per al nombre 12?
11. Quin és el codi $1 \leftarrow 9$ per al nombre 20?

Molt bé. Ara fem-la ben grossa.

Anem a una màquina $1 \leftarrow 10$ i posem-hi 273 punts!

Quin és el codi secret $1 \leftarrow 10$ per al nombre 273?



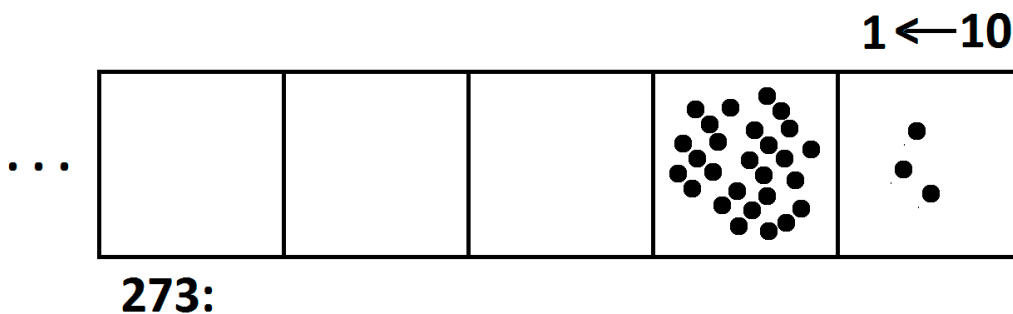
Hi vaig reflexionar a través d'una sèrie de preguntes:

Hi haurà explosions? Hi ha grups de deu que explotaran? I tant!

Quantes explosions hi haurà inicialment? Vint-i-set.

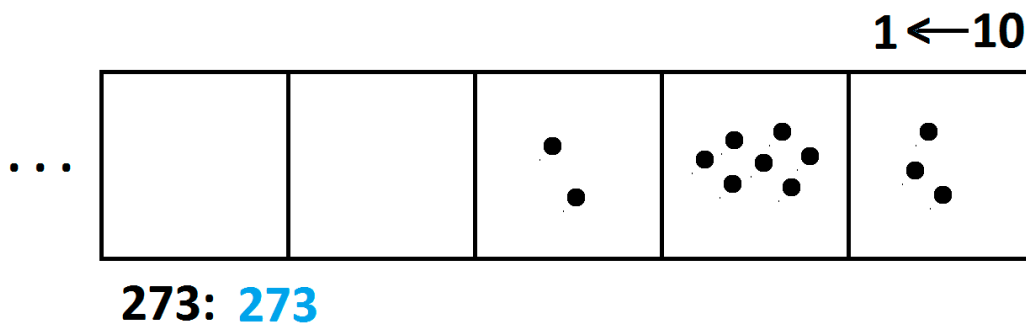
En quedarà algun punt? Sí, tres.

D'acord. Per tant, tenim vint-i-set explosions, cada una de les quals fa un punt a l'esquerra. I en quedaran tres punts.



Hi haurà més explosions? Sí, dues més.

En quedarà algun punt? Sí, set.



El codi $1 \leftarrow 10$ per al 273 és... 273. Ostres!

12. a) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 13?
- b) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 37?
- c) Quin és el codi $1 \leftarrow 10$ per al nombre 5846?

Alguna cosa curiosa està passant aquí!

Quina seria la gran pregunta ara?

Exploracions brutals

A sota teniu algunes investigacions sobre «grans preguntes»: podeu explorar-les o bé simplement reflexionar-hi. Totes s'aniran aclarint a mesura que la història avanci en propers capítols, però igualment pot ser divertit reflexionar sobre aquestes idees ara.

EXPLORACIÓ 1: QUÈ ESTAN FENT, AQUESTES MÀQUINES?

Podeu esbrinar què és el que estan fent aquestes màquines?

Per què el codi per al nombre 273 en una màquina $1 \leftarrow 10$ és 273? Tots els codis per a nombres d'una màquina $1 \leftarrow 10$ són idèntics a com escrivim normalment els nombres?

Si heu pogut respondre aquesta pregunta, podeu entendre també tots els codis d'una màquina $1 \leftarrow 2$? ¿Què significa el codi 1101 per al nombre 13?

Observació: La resposta a aquestes preguntes es troba a l'experiència 2.

EXPLORACIÓ 2: L'ORDRE EN QUÈ FEM EXPLOTAR ELS PUNTS, ÉS RELLEVANT?

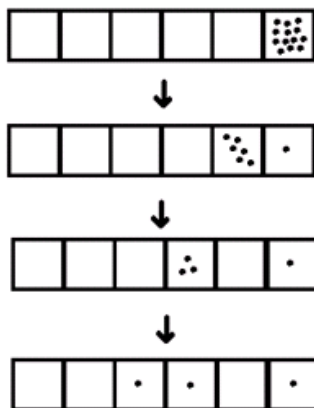
Poseu dinou punts en la casella de més a la dreta d'una màquina $1 \leftarrow 2$ i feu explotar uns quants parells de punts a l'atzar: primer, alguns parells a la casella situada més a la dreta; després, uns altres a la segona casella; a continuació, uns quants més a la casella situada més a la dreta; i, de nou, alguns parells a la segona casella; i així successivament. Torneu a fer-ho, aquest cop canviant l'ordre en què feu les explosions. I una vegada més, encara!

Apareix el mateix codi final 10011 cada vegada?

Solucions

Tal com vaig prometre, aquí estan les meves respostes a les preguntes plantejades.

1. a) Aquí veiem com es genera el codi *1101* a partir de tretze punts.



- b) El nombre 50 té el codi *110010*.
2. Si decidim optar per fer explotar els punts sempre que puguem, aleshores el codi *100211* no està complet: els dos punts de la tercera casella abans de l'última poden explotar i, aleshores, donar *101011* com a codi final.
3. Aquest és el codi per al nombre 19. (En la propera experiència descobrirem un mètode àgil per poder-ho veure.)
4. a) Fes-ho! b) Fes aquest també! c) Estàs imparable. Fes aquest tercer també!
5. Com abans, si acordem fer totes les explosions que puguem, aquest codi no estarà complet: tres dels punts de la segona casella abans de l'última poden explotar i, aleshores, donar *2111* com a codi.
6. Aquest codi és del nombre 35.
7. «Quatre punts situats en qualsevol casella exploten i són substituïts per un punt a la casella de l'esquerra». El nombre 13 té el codi *31* en una màquina $1 \leftarrow 4$.
8. És 23.
9. És 14.
10. És 22.
11. És 22. (El mateix codi que a la pregunta anterior, però, és clar, la seva interpretació és diferent.)
12. a) És 13. b) És 37. c) És 5846. (Aquests són els codis que utilitzem per als nombres en el nostre dia a dia!)