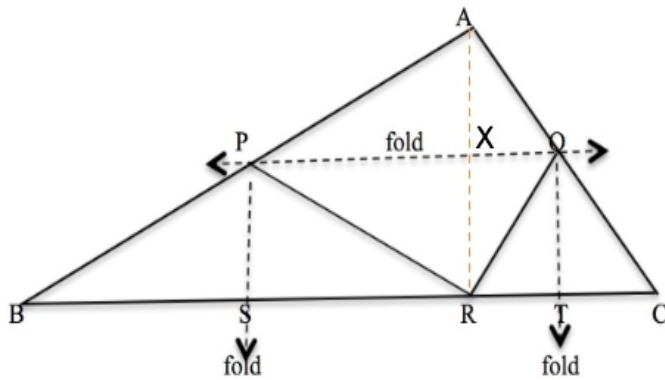


TRI-PLEX



1. Recorta un triángulo cualquiera y llámalo **ABC**, donde **A** es vértice del ángulo mayor.
2. Lleva el vértice **A** sobre el vértice **B** y pinza ligeramente el papel para marcar el punto medio del lado **AB**. Llama **P** a ese punto.
3. Lleva **A** sobre **C** y pinza ligeramente para marcar el punto medio del lado **AC**. Llama **Q** a ese punto.
4. Dobla por el vértice **A**, de modo que **C** quede sobre base del triángulo. Marca el punto **R**. Desdobla.
 - ¿Qué observas respecto a los ángulos $\angle ARB$ y $\angle ARC$?
 - Lleva **B** sobre **R** y marca los puntos **P** y **S**. ¿Qué observas?
 - Lleva **C** sobre **R** y marca los puntos **Q** y **T**. ¿Qué observas?
 - Dobla a lo largo de los segmentos **PQ**, **PS** y **QT**. Encontrarás que los puntos **A**, **B** y **C** coinciden con **R**.
 - ¿Qué más observas? ¿Te enseña algo más sobre triángulos este experimento de papiroflexia?
 - ¿Por qué ocurre todo esto?
 - Esta actividad de papiroflexia muestra varias relaciones geométricas importantes.
 - ¿Pasará lo mismo con todos los triángulos? Si es así, ¿puedes probarlo?

AYUDA

- Usa colores para distinguir cada conjunto de ángulos iguales y cada conjunto de segmentos iguales. Te ayudará a ver qué ángulos son iguales, y a descubrir otras propiedades geométricas.

CONTINUACIÓN

- Debido a que es tan abierta, esta actividad contiene su propia continuación. ¡Te llevará mucho tiempo explorar todas las posibilidades! ¿Puedes responder completamente a todas las Preguntas Clave?

Preguntas clave

General

- ¿Dónde está el pie de la perpendicular de **A** a **BC**?
- ¿Qué longitudes son iguales?
- ¿Qué ángulos son iguales?
- ¿Qué triángulos son isósceles?
- ¿Qué triángulos son congruentes?
- ¿Qué triángulos son similares?

Ángulos

- ¿Qué ángulos son de 90° ?
- ¿Qué ángulos suman 180 grados?

Áreas

- ¿Qué pares de triángulos tienen el mismo área?
- ¿Qué forma conseguiste al doblar **A**, **B** y **C** sobre **R**?
- ¿Puedes ver un rectángulo en la figura?
- ¿Qué triángulos hay en el rectángulo?
- ¿Qué triángulos no están en el rectángulo?
- ¿Qué demuestra esto sobre el área de un triángulo?

Transformaciones

- ¿Qué observas respecto a los ocho triángulos pequeños dentro del grande?
- ¿Se ven ampliaciones o escalas en la figura? Descríbelas.
- ¿Qué simetrías ves?
- ¿Hay líneas de simetría? ¿Qué puedes decir de ellas?
- ¿Se ven reflexiones en la imagen?

Teorema del punto medio

- Dónde está el pie de la perpendicular de **A** a **BC**?
- ¿Puedes ver una longitud que sea el doble de otra? ¿Por qué lo crees?
- Qué puedes decir sobre las líneas paralelas del diagrama.

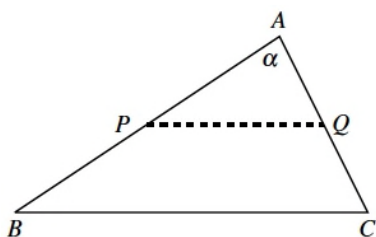
Necesitarás: papel, tijeras, reglas y lápices de colores

NOTAS PARA PROFESORES

SOLUCIÓN

- o Este experimento muestra que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de longitud. Esto se demuestra más abajo como teorema.
- o Cualquier triángulo se puede plegar a lo largo de 3 líneas como muestra la figura, de tal manera que los vértices **A**, **B** y **C** se encuentren en el punto **R** del lado **BC**. Esto reúne a los ángulos del triángulo sobre la línea **BC** y muestra que los ángulos del triángulo suman 180° . La prueba de que los tres vértices se unen **R** se sigue del **Teorema 1**.
- o La actividad también muestra que el área del triángulo es el doble del área del rectángulo **PQTS**, es decir, la mitad de la base por la altura. La demostración también es consecuencia del **Teorema 1**.

Teorema 1. En el triángulo $\triangle ABC$ de abajo, **P** es el punto medio de **AB**, y **Q** es el punto medio de **AC** (así, $AP = PB$ y $AQ = QC$).



Demostramos que $PQ = \frac{1}{2} BC$ y que **PQ** es paralelo a **BC**.

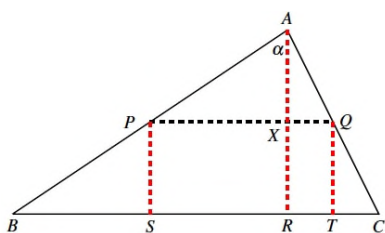
Prueba. Los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle ABC$ son similares porque $AP/AB = AQ/AC = \frac{1}{2}$ y ambos triángulos tienen el mismo ángulo α en **A**. Por tanto $PQ/BC = \frac{1}{2}$, así que $PQ = \frac{1}{2} BC$.

De la similaridad de $\triangle APQ$ y $\triangle ABC$ se sigue que $\angle APQ = \angle ABC$ y por tanto **PQ** es paralelo a **BC**.

Corolario 1. Los ángulos de un triángulo suman 180° .

Prueba.

Considera el diagrama



donde $AP = PB$ y $AQ = QC$.

Construimos R , S y T para que PS , AR y QT sean perpendiculares a BC (esto se puede hacer doblando el triángulo de papel). Obtenemos X como intersección de AR y PQ .

Como PQ es paralelo a BC , vemos que $\triangle AXQ$ es similar a $\triangle ARC$, por lo que $AX = \frac{1}{2} AR$ y $XQ = \frac{1}{2} RC$.

Como PQ es perpendicular a AR y X es el punto medio de AR , se deduce que A se pliega a través de PQ hasta R .

Por lados opuestos de un rectángulo, $XQ = RT = \frac{1}{2} RC$ y $XR = QT$, por lo que C se pliega a través de QT hasta R .

Lo mismo ocurre con el otro lado del triángulo $\triangle ABC$, es decir, B se pliega a través de PS hasta el punto R .

Por lo tanto, los 3 ángulos del triángulo son ángulos adyacentes en una línea recta y suman 180° .

Corolario 2. *El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura.*

Prueba.

Los triángulos $\triangle PBS$ y $\triangle PRS$ son imágenes especulares respecto al eje de plegado PS , por lo que estos triángulos son congruentes e iguales en área.

Los triángulos $\triangle QCT$ y $\triangle QRT$ son imágenes especulares respecto al eje de plegado QT , por lo que estos triángulos son congruentes e iguales en área.

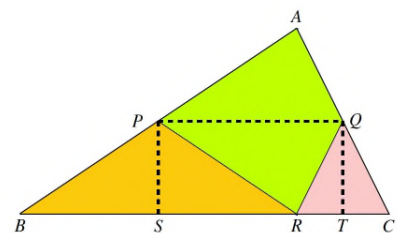
Los triángulos $\triangle APQ$ y $\triangle RPQ$ son imágenes especulares respecto al eje de plegado PQ , por lo que estos triángulos son congruentes e iguales en área.

De ello se deduce que el área del triángulo $\triangle ABC = 2 \times$ área del rectángulo $PQTS$.

Vemos que $BS = SR$ y $RT = TC$, entonces $ST = \frac{1}{2} BC$

También vemos que $PS = \frac{1}{2} AR$.

El área del triángulo $\triangle ABC = 2 \times ST \times PS = 2 \times \frac{1}{2} BC \times \frac{1}{2} AR = \frac{1}{2} BC \times AR$, que es la mitad de la base BC por la altura AR del triángulo.



¿Por qué hacemos esta actividad?

- La actividad Tri-Plex es un **recurso de inclusión ideal para escuelas y también es una actividad ideal** para grupos de jóvenes de edades diversas que estudian juntos en **casa**.
- Tanto los alumnos adultos, como los de 18 años y los adolescentes quedarán igualmente impresionados por lo que revela esta sencilla actividad de papiroflexia.
- La actividad utiliza los sentidos táctiles y la visualización para adaptarse a diferentes estilos de aprendizaje individual. También proporciona vínculos entre diferentes propiedades geométricas de una manera que es fácil de recordar.
- En un grupo de aprendizaje en casa, los niños más pequeños pueden observar aspectos que los mayores no han detectado. Escuchar lo que dice un alumno mayor animará a los alumnos más jóvenes, incluso si no lo entienden todo en ese momento. Si es posible enviar trabajos por escrito al profesor del niño, este puede revisar los errores y corregirlos.
- Esta actividad, al ser tan abierta, incluye sus propias extensiones. Muy pocos alumnos habrán explorado todas las posibilidades. **Debe felicitar a los alumnos por el trabajo bien hecho y hacerles luego más preguntas para ayudarles a encontrar más posibilidades por sí mismos**. Por ejemplo, llevará algo de tiempo y reflexión responder a todas las preguntas clave por completo.
- Esta actividad es un experimento práctico muy sencillo y tiene un resultado grato y sorprendente: ¿Por qué los 3 vértices del triángulo se encuentran exactamente en la base del triángulo? ¿Ha sido solo suerte o siempre pasará lo mismo?
- Es una actividad con muy bajo coste material y dará pie a muchas más propiedades geométricas.
- Reúne y enlaza conceptos de geometría de transformaciones (que es muy importante en matemáticas superiores) con propiedades que pueden expresarse en términos de triángulos similares, triángulos isósceles, triángulos congruentes, rectas paralelas, etc.
- Esta actividad muestra cuatro áreas temáticas de geometría. puede utilizarse como una introducción a cualquiera de estas áreas mediante el planteamiento de preguntas que focalicen la atención de los alumnos sobre las características y las propiedades geométricas relacionadas con el enfoque elegido.
- La actividad también sirve como repaso de la geometría que los alumnos ya deberían conocer. Debido a que es muy abierta, es ideal como inclusiva de todas las capacidades.

- Es posible que los alumnos de menor rendimiento no lleguen a observar todas las propiedades, pero deberían poder concluir con éxito el plegado y (con la ayuda adecuada) comprender la demostración de al menos uno de los resultados.
- Para los alumnos de alto rendimiento supone un muy buen desafío. Les proporcionará mucho espacio para pensar matemáticamente e ir más allá en la demostración de más resultados.

Competencias genéricas

Al realizar esta actividad, los alumnos tendrán la oportunidad de:

- **Pensar matemáticamente**, razonar lógicamente, explicar sus ideas a otros y aplicar conocimientos y habilidades;
- **Desarrollar** habilidades de **visualización** para interpretar o crear imágenes;
- **Trabajar en equipo, compartir ideas y aprender juntos**;
- **Comunicar** ideas y presentar información e ideas a otros según la audiencia;
- **Analizar**, razonar y cristalizar ideas de forma eficaz.

Objetivos de aprendizaje

Al realizar esta actividad, los alumnos tendrán la oportunidad de explorar y profundizar en su comprensión de:

- los ángulos de un triángulo suman 2 ángulos rectos;
- la fórmula del área de un triángulo;
- operaciones de reflexión y ampliación;
- triángulos semejantes y triángulos congruentes;
- el teorema del punto medio del triángulo;
- cómo reconocer lo que ya se sabe y cómo construir una prueba.

Sugerencias para el profesorado

- Realizad la actividad de papiroflexia juntos como actividad clase. Cada alumno debe tener su propio triángulo de papel. Al final, los triángulos deben pegarse en los cuadernos de trabajo de modo que el rectángulo **PQTS** quede pegado al papel y las «solapas» triangulares **APQ**, **BPS** y **CQT** se plieguen hacia abajo, pero se puedan levantar.
- Dependiendo de tus objetivos de aprendizaje para la lección y de cuánto tiempo quieras dedicar a esta actividad, puedes pedirles a los alumnos que trabajen en el tema elegido o puedes usar este tema como base para una revisión de lo que los alumnos saben y comprenden de geometría.
- Pregunta a los alumnos qué han observado y haz una lista de las propiedades observadas. Asigna diferentes grupos de alumnos para que descubran todo lo que puedan sobre una de las propiedades de la lista, quizá la que vieron por primera vez. Diles que se preparen para explicar lo que han descubierto a sus compañeros para que todos vean la cantidad ideas posibles que se pueden desarrollar.
- Más adelante en la lección, puedes pedir a diferentes alumnos que se acerquen a la pizarra y expliquen lo que han hecho. Asegúrate de detectar y corregir los errores y proporcionar a los alumnos un resumen de lo aprendido.

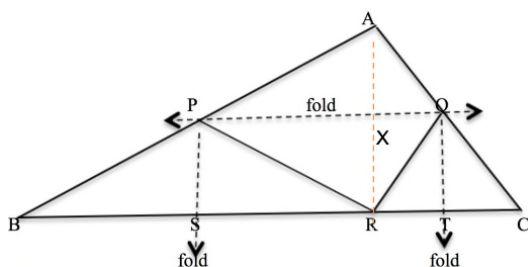
Para todos los grupos de edad: El enfoque sugerido es hacer preguntas muy abiertas:

- ¿Qué has observado?
 - ¿Por qué ocurre esto?
 - ¿Ocurrirá con todos los triángulos? Si es así, ¿puedes demostrarlo?
 - ¿Hay algo más sobre los triángulos que te enseñe este experimento de papiroflexia?
- Estas preguntas permiten a los alumnos pensar de forma independiente, darse cuenta de las cosas por sí mismos y sugerir propiedades geométricas diferentes e igualmente importantes que podrían aparecer a continuación.
 - Hablar de lo que observan en esta actividad de papiroflexia sienta una base sólida para el trabajo posterior en geometría. Si tus alumnos están acostumbrados a este estilo de enseñanza, responderán bien.

La actividad trabaja al menos cuatro propiedades de los triángulos:

- 1) Los ángulos de un triángulo suman 180° .
- 2) El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura.
- 3) Propiedades de reflexiones y escalas.
- 4) El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene la mitad de longitud. Esto se llama **teorema del punto medio del triángulo**. Se puede demostrar formalmente y los enunciados 1, 2 y 3 se derivan de él.

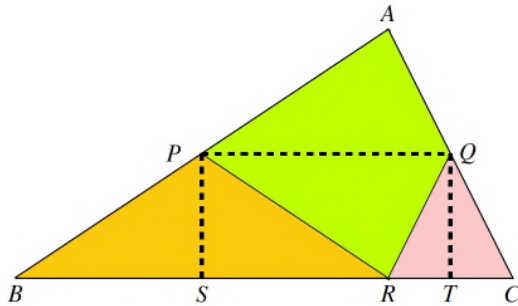
1: Los ángulos de un triángulo suman 180°



- o Dibuja el diagrama adjunto y pide a los alumnos que dibujen y recorten sus propios triángulos y que intenten hacerlos diferentes de los triángulos de sus compañeros.
- o Pídeles que coloquen el triángulo recortado de modo que el ángulo más grande esté en la parte superior y que llamen a su triángulo **ABC**. (Nota: Los nombres de los elementos deben estar dentro del triángulo recortado).
- o A continuación, dobla a través de **A**, de modo que **C** esté en la base del triángulo. Marca el punto **R**.
- o Pregunta: «¿Qué observas respecto a los ángulos $\angle \text{ARB}$ y $\angle \text{ARC}$?». (Son ángulos rectos).
- o Dobla **B** hasta el punto **R** y dobla **C** hasta el punto **R** como se muestra en el diagrama. ¿Qué han observado?
- o A continuación, pídeles a los alumnos que doblen **A** para que coincida exactamente con **R**. Si lo hacen con cuidado, verán que **los tres vértices se encuentran exactamente en el único punto R** y que los tres ángulos se encuentran juntos a lo largo de la línea base del triángulo.
- o Esto es suficiente como demostración de que los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos o 180° .
- o Puedes preguntar a los alumnos qué más observan, que podría incluir:
 - El triángulo se puede doblar en un rectángulo.
 - El plegado muestra que el área del triángulo es el doble del área del rectángulo.
 - El segmento **PQ** parece paralelo a la base del triángulo.
 - **P** y **Q** parecen ser los puntos medios de **AB** y **AC**.
- o Intenta que los alumnos se ocupen en verificar las observaciones y debatirlas. Todo este trabajo muestra pero no prueba que las propiedades se mantienen en el caso general.

2. El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura

- o Puedes usar esta actividad como una introducción para una lección sobre áreas centrada en la fórmula del área de un triángulo. A continuación, la clase puede trabajar más profundamente las áreas.



- o Los colores indican los pares de triángulos congruentes.
- o Observa que la altura **PS** del rectángulo es la mitad de la altura **AR** del triángulo, y que la base **ST** del rectángulo es la mitad de la base **BC** del triángulo.
- o Los pliegues nos muestran que el área de $\triangle ABC$ es el doble del área del del rectángulo **PQTS**.
- o De ello se deduce que área de $\triangle ABC = 2 \times ST \times PS = 2 \times \frac{1}{2} \text{ base del triángulo} \times \frac{1}{2} \text{ altura del triángulo}$.
- o **Esto muestra que el área de un triángulo es la mitad de la base por la altura del triángulo.**

3. Propiedades de reflexiones y escalas

- o Los alumnos mayores deben realizar las actividades y descubrir por sí mismos los hechos geométricos demostrados.
- o Las líneas de plegado son ejes de simetría (ejes de reflexión) y $\triangle ABC$ es una ampliación de $\triangle APQ$. En nuestra vida, todos experimentamos reflexiones en los espejos y el escalado de formas en las pantallas o en las sombras en una pared.

Pruebas formales

- o Los alumnos mayores deben aprender que las demostraciones experimentales o particulares no son pruebas. Es necesario demostrar formalmente que los resultados son exactamente lo que parecen, que sus ojos no les engañan y que estos resultados se mantienen para todos los triángulos. (Consulta las soluciones en las páginas 3 y 4).
- o Esta actividad se puede utilizar para ofrecer a los alumnos mayores la experiencia de observar las propiedades geométricas por sí mismos y luego escribir su razonamiento formalmente.

PROFUNDIZACIÓN

Acertijo de Dos por dos <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-4-7-two-by-two-puzzle/>

Rectángulos enteros <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-5-8-wholesome-rectangles/>

¿Es un cuadrado un rectángulo? <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-5-10-is-a-square-a-rectangle/>

Suma de ángulos: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-8-10-angle-sum/>

Conjuntos Sim <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/grades-8-to-10-simsets/>

Visita la web de [HelloMath!](#) para más actividades de matemáticas y computación para primaria.



- o **Visita** la web AIMING HIGH de AIMSSEC (en inglés) para obtener ideas de lecciones, soluciones y enlaces al plan de estudios: <http://aiminghigh.aimssec.ac.za>
 - o **Suscríbete** al canal de YouTube MATHS TOYS <https://www.youtube.com/c/mathstoys>
 - o **Descarga** la colección completa de recursos de AIMSSEC para usarla offline con la aplicación AIMSSEC de <https://aimssec.app> o búscala en Google Play.
- Consulta <https://nrich.maths.org> para encontrar recursos para secundaria.



© Toni Beardon bajo Licencia Creative Commons BY-NC-SA 4.0