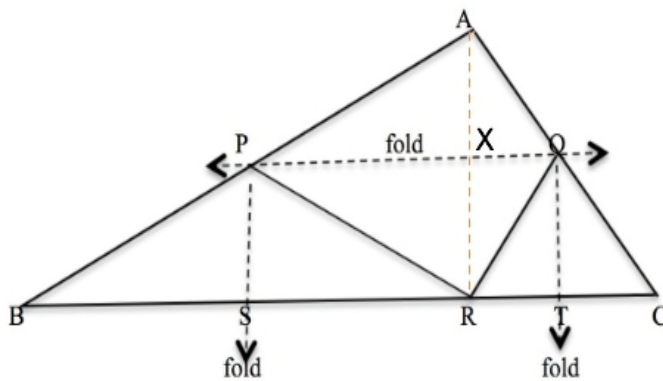


## TRI-PLEC



1. Retalla un triangle qualsevol i anomena'l **ABC**, amb **A** com a vèrtex de l'angle més gran.
2. Ajunta el vèrtex **A** amb el vèrtex **B** i pinça lleugerament el paper per marcar el punt mitjà del costat **AB**. Anomena aquest punt **P**.
3. Ajunta **A** amb el vèrtex **C** i pinça lleugerament per marcar el punt mitjà del costat **AC**. Anomena aquest punt **Q**.

4. Plega el vèrtex **A** de manera que la **C** quedi sobre la base del triangle. Marca el punt **R**. Desdoblega.
  - Què observes respecte als angles  $\angle ARB$  i  $\angle ARC$ ?
  - Ajunta **B** i **R** i marca els punts **P** i **S**. Què observes?
  - Ajunta **C** i **R** i marca els punts **Q** i **T**. Què observes?
  - Plega al llarg dels segments **PQ**, **PS** i **QT**. Trobaràs que els punts **A**, **B** i **C** coincideixen tots amb el punt **R**.
  - Què més observes? T'ensenya res més sobre els triangles aquest experiment de papiroflèxia?
  - Per què passa tot això?
  - Aquesta activitat de papiroflèxia mostra diverses relacions geomètriques importants.
  - Passarà el mateix amb tots els triangles? Si és així, ho pots demostrar?

## AJUDA

- Utilitza colors per distingir cada conjunt d'angles iguals i cada conjunt de segments iguals. T'ajudarà a veure quins angles són iguals i a descobrir altres propietats geomètriques.

## CONTINUACIÓ

- Pel fet de ser tan oberta, aquesta activitat conté la seva pròpia continuació. Caldrà molt temps per explorar totes les possibilitats. Pots respondre completament a totes les Preguntes Clau?

## Preguntes clau

### General

- On és el peu de la perpendicular d'A a BC?
- Quines longituds són iguals?
- Quins angles són iguals?
- Quins triangles són isòsceles?
- Quins triangles són congruents?
- Quins triangles són similars?

### Angles

- Quins angles són de  $90^\circ$ ?
- Quins angles sumen fins a 180 graus?

### Àrees

- Quins parells de triangles tenen la mateixa àrea?
- Quina forma has aconseguit quan has plegat A, B i C sobre R?
- Podeu veure un rectangle a la figura?
- Quins triangles hi ha al rectangle?
- Quins triangles no es troben al rectangle?
- Què mostra això sobre l'àrea d'un triangle?

### Transformacions

- Què observes respecte dels vuit triangles petits que hi ha dins del gros?
- Es veuen escales i ampliacions al diagrama? Descriu-les.
- Quines simetries hi veieu?
- Hi ha eixos de simetria? Que pots comentar-ne?
- Hi ha cap reflexió a la imatge?

### Teorema del punt mitjà dels triangles

- On és el peu de la perpendicular d'A a BC?
- Trobes cap longitud que sigui el doble d'una altra longitud? Per què ho creus?
- Què pots dir de les línies paral·leles de la figura?

*Necessitats: paper, tissores, regles i llapis de colors*

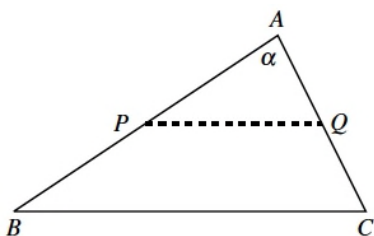
## NOTES PER AL PROFESSORAT

## SOLUCIÓ

- Aquest experiment mostra que el segment que uneix els punts mitjans dels dos costats d'un triangle és paral·lel al tercer costat i té la meitat de la longitud. Això és demostra més avall com a teorema.
- Qualsevol triangle es pot doblegar al llarg de 3 línies com mostra la figura, de manera que els vèrtexs **A**, **B** i **C** es troben en el punt **R** del costat **BC**. Això fa que s'ajuntin els angles del triangle sobre la línia **BC** i mostra que els angles del triangle sumen  $180^\circ$ . La prova que els tres vèrtexs s'uneixen a **R** es desprèn del Teorema 1.
- L'activitat també mostra que l'àrea del triangle és el doble de l'àrea del rectangle **PQTS**, és a dir, la meitat de la base multiplicat per la alçada. La prova també es desprèn del Teorema 1.

**Teorema 1.** En el triangle  $\triangle ABC$  següent, **P** és el punt mitjà d'**AB**, i **Q** és el punt mitjà d'**AC**

(així  $AP = PB$  i  $AQ = QC$ ). Demostrem que  $PQ = \frac{1}{2} BC$  i que **PQ** és paral·lel a **BC**.



*Demostremos que  $PQ = \frac{1}{2} BC$  y que **PQ** es paralelo a **BC**.*

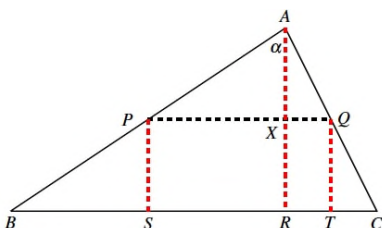
**Prova.** Els triangles  $\triangle APQ$  i  $\triangle ABC$  són similars perquè  $AP/AB = AQ/AC = \frac{1}{2}$  i tots dos triangles tenen el mateix angle  $\alpha$  a **A**. Per tant,  $PQ/BC = \frac{1}{2}$ ; és a dir  $PQ = \frac{1}{2} BC$ .

A partir de la similitud entre  $\triangle APQ$  i  $\triangle ABC$ , es desprèn que  $\angle APQ = \angle ABC$  i, per tant, **PQ** és paral·lel a **BC**.

**Corol·lari 1.** Els angles d'un triangle sumen  $180^\circ$ .

**Prova.**

Considera el diagrama



on  $AP = PB$  i  $AQ = QC$ .

Construïm R, S i T perquè les línies PS, AR i QT siguin perpendiculars a BC (això es pot fer plegant el triangle de paper). Obtenim X com a intersecció d'AR i PQ.

Com que PQ és paral·lel a BC, veiem que  $\triangle AXQ$  és similar a  $\triangle ARC$ , de manera que  $AX = \frac{1}{2} AR$  i  $XQ = \frac{1}{2} RC$ .

Com que PQ és perpendicular a AR, i X és el punt mitjà d'AR, es desprèn que A es plega a través de PQ fins a R.

Pel que fa als costats oposats d'un rectangle,  $XQ = RT = \frac{1}{2} RC$  i  $XR = QT$ , de manera que C es plega a través de QT fins a R.

El mateix passa a l'altra cara del triangle  $\triangle ABC$ , és a dir, B es plega per PS fins al punt R.

Per tant, els 3 angles del triangle són angles adjacents en línia recta i sumen  $180^\circ$ .

**Corol·lari 2.** *L'àrea d'un triangle és la meitat de la base per l'alçada.*

**Prova.**

Els triangles  $\triangle PBS$  i  $\triangle PRS$  són imatges especulars respecte de l'eix de doblec PS, de manera que aquests triangles són congruents i tenen la mateixa àrea.

Els triangles  $\triangle QCT$  i  $\triangle QRT$  són imatges especulars respecte de l'eix de doblec QT, de manera que aquests triangles són congruents i tenen la mateixa àrea.

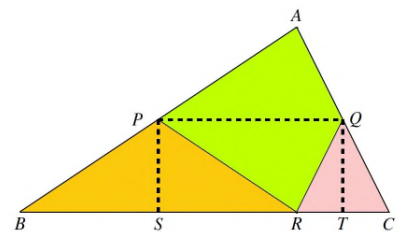
Els triangles  $\triangle APQ$  i  $\triangle RPQ$  són imatges especulars respecte de l'eix de doblec PQ, de manera que aquests triangles són congruents i tenen la mateixa àrea.

D'aquí es desprèn que l'àrea del triangle  $\triangle ABC = 2 \times$  àrea del rectangle PQTS.

Veiem que  $BS = SR$  i  $RT = TC$ , per tant  $ST = \frac{1}{2} BC$

També veiem que  $PS = \frac{1}{2} AR$ .

L'àrea del triangle  $\triangle ABC = 2 \times ST \times PS = 2 \times \frac{1}{2} BC \times \frac{1}{2} AR = \frac{1}{2} BC \times AR$ , que és la meitat de la base BC multiplicada per l'alçada AR del triangle.



## Per què fem aquesta activitat?

- L'activitat Tri-Plec és un recurs d'inclusió ideal per a escoles i també és una activitat ideal per a un grup de joves d'edats diverses que aprenen junts a casa.
- Els adults, joves de 18 anys i estudiants quedaran igualment impressionats pel que revela aquesta senzilla activitat de papiroflèxia.
- L'activitat requereix el tacte i la visualització per adaptar-se a diversos estils d'aprenentatge individuals. També proporciona vincles entre diverses propietats geomètriques d'una manera fàcil de memoritzar.
- En un grup d'aprenentatge a casa, els nens més petits poden adonar-se d'alguns aspectes que als grans els han passat desapercebut. Escoltar el que diu un estudiant gran animarà els més joves, fins i tot si no ho entenen tot de moment. Si és possible enviar treballs escrits al professor del nen, aquest pot revisar els errors i corregir-los.
- Aquesta activitat, pel fet de ser tan oberta, es pot ampliar de diverses maneres. Pocs estudiants exploraran totes les possibilitats. **Cal felicitar els estudiants per feina que han fet i, tot seguit, plantejar-los més preguntes per ajudar-los a trobar altres possibilitats pel seu compte.** Per exemple, es necessitarà una mica de temps, i algunes reflexions, per respondre plenament a totes les preguntes clau.
- Aquesta activitat és un experiment pràctic i té un resultat sorprenent i agradable: Per què els 3 vèrtexs del triangle es troben exactament a la base del triangle? Ha estat qüestió de sort o sempre passarà el mateix?
- És una activitat amb uns costos de material molt baixos i donarà peu a moltes altres propietats geomètriques.
- Reuneix i enllaça conceptes de geometria de transformacions (que és molt important en matemàtiques superiors) amb propietats que es poden afirmar en termes de triangles similars, triangles isòsceles, triangles congruents, rectes paral·leles, etc.
- Aquesta activitat mostra quatre àrees temàtiques de la geometria. Pot utilitzar com a introducció a qualsevol d'aquestes àrees plantejant preguntes que centrin l'atenció dels estudiants sobre les característiques i les propietats geomètriques relacionades amb l'enfocament triat.
- L'activitat també és adequada com a revisió d'aspectes de la geometria que els estudiants ja haurien de conèixer. Com que és molt oberta, és ideal per incloure totes les capacitats.

- És possible que els estudiants de menor rendiment no arribin a observar totes les propietats, però haurien de poder concloure amb èxit tots els plecs i (amb l'ajuda adequada) poder comprendre la demostració d'almenys un dels resultats.
- En el cas dels alumnes d'alt rendiment, això suposa un bon desafiament. Els proporcionarà molt espai perquè pensin matemàticament i vagin més enllà a l'hora de demostrar resultats.

## Competències generals

Amb aquesta activitat, els estudiants tindran l'oportunitat de:

- **Pensar matemàticament**, raonar lògicament, explicar les seves idees als altres i aplicar coneixements i habilitats.
- **Desenvolupar** habilitats de **visualització** per interpretar o crear imatges.
- **Treballar en equip, compartir idees i aprendre junts.**
- **Comunicar** idees i presentar informació i idees als altres segons del públic.
- Analitzar, raonar i cristal·litzar idees de manera eficaç.

## Objectius d'aprenentatge

Amb aquesta activitat, els estudiants tindran l'oportunitat d'explorar i aprofundir en els seus coneixements sobre el següent:

- Els angles d'un triangle sumen fins a dos angles rectes.
- La fórmula de l'àrea d'un triangle.
- Operacions de reflexió i ampliació.
- Triangles similars i triangles congruents.
- El teorema del punt mitjà del triangle.
- Com reconèixer el que ja se sap i com demostrar-ho.

## Suggeriments per al professorat

- Feu l'activitat de papiroflèxia amb tota la classe. Cada estudiant ha de tenir el seu propi triangle de paper. Al final, s'han de desar els triangles a les llibretes perquè el rectangle **PQTS** quedi enganxat al paper i les «solapes» triangulars **APQ**, **BPS** i **CQT** triangulars quedin doblegades cap avall, però es puguin aixecar
- En funció dels objectius d'aprenentatge de la lliçó i del temps que es vulgui dedicar a aquesta activitat, pots demanar als estudiants que treballin el tema escollit o pots utilitzar aquest tema com a base per revisar el que els estudiants saben i entenen sobre geometria.
- Pregunta als estudiants què han observat i feu una llista de les propietats observades. Assigna diversos grups d'estudiants a descobrir tot el que puguin sobre una de les propietats de la llista, potser la que van descobrir en primer lloc. Digues-los que es preparin per explicar el que han trobat als companys perquè tothom vegi la quantitat d'idees possibles que es poden desenvolupar.
- Quan avanceu a la lliçó, pots demanar a diversos estudiants que surtin a la pissarra i expliquin què han fet. Assegura't de detectar i corregir els errors i proporcionar als alumnes un resum del que han après.

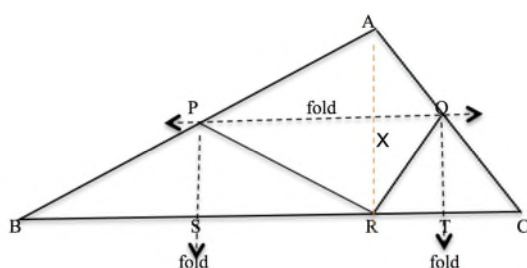
**Per a tots els grups d'edat:** l'enfocament suggerit és fer preguntes molt obertes:

- Què veus?
  - Per què passa això?
  - Passarà amb tots els triangles? Si és així, pots demostrar-ho?
  - Hi ha res més sobre triangles que t'ensenyi aquest experiment de papiroflèxia?
- Aquestes preguntes permeten als estudiants pensar de manera independent, observar coses per si mateixos i suggerir propietats geomètriques diferents i igualment importants que puguin aparèixer a continuació.
  - El fet de parlar del que els estudiants observen en aquesta activitat de papiroflèxia és un gran fonament per a feines posterior relacionades amb la geometria. Si els vostres estudiants estan acostumats a aquest estil d'ensenyament, hi respondran bé.

L'activitat demostra almenys quatre propietats dels triangles.

- 1) Els angles d'un triangle sumen  $180^\circ$ .
- 2) L'àrea d'un triangle és la base multiplicada per l'alçada i dividit entre 2.
- 3) Propietats de reflexions i escales.
- 4) El segment que uneix els punts mitjans dels costats d'un triangle és paral·lel al tercer costat i té la meitat de longitud. Això s'anomena **teorema del punt mitjà del triangle**. Es pot demostrar formalment i els enunciats 1, 2 i 3 se'n deriven.

### 1: Els angles d'un triangle sumen $180^\circ$



o Dibuixa el diagrama adjunt i demana als estudiants que dibuixin i retallin els seus triangles i que intentin fer que siguin diferents als triangles d'altres companys.

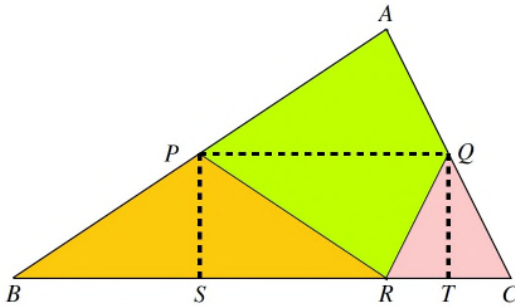
o Demana'ls que col·loquin el triangle retallat de manera que l'angle més gran sigui a la part superior i que anomenin el seu triangle ABC. (Nota: Els noms dels elements han de ser dins del triangle retallat.)

- o A continuació, plega la cara A de manera que la C estigui a la base del triangle. Marqueu el punt R.
- o Pregunta: «Què observeu sobre els angles  $\angle ARB$  y  $\angle ARC$ ?». (Són angles rectes).
- o Plegueu el punt B fins al punt R i el punt C fins al punt R, tal i com es mostra al diagrama. Què observeu?
- o A continuació, demana als estudiants que pleguin el punt A perquè coincideixi exactament amb l'únic punt R. Si ho fan com cal, veuran que els tres vèrtexs es troben exactament al punt R i que els tres angles es troben junts al llarg de la línia de base del triangle.
- o Això és suficient per demostrar que els angles d'un triangle sumen dos angles rectes o  $180^\circ$ .
- o Pots demanar als estudiants què més observen, com ara:
  - El triangle es pot plegar per formar un rectangle.
  - El plegado muestra que el área del triángulo es el doble del área del rectángulo.
  - El segmento PQ parece paralelo a la base del triángulo.
  - P y Q parecen ser los puntos medios de AB y AC.
- o Intenta que els alumnes provin de verificar les observacions i debateu-les. Tota aquesta feina mostra, però no demostra, que les propietats es mantenen de manera general.



## 2. L'àrea d'un triangle és la meitat de la base per la alçada

- Pots utilitzar aquesta activitat com a introducció per a una lliçó sobre temes relacionats amb la fórmula de l'àrea d'un triangle. D'aquesta manera, la classe pot aprofundir més en cada àrea.



- Els colors indiquen els parells de triangles congruents.
- Observa que l'altura **PS** del rectangle és la meitat de l'altura **AR** del triangle i la base **ST** del rectangle és la meitat de la base **BC** del triangle.
- Els plecs ens mostren que l'àrea de  $\triangle ABC$  és el doble de l'àrea del rectangle **PQTS**.
- D'això se'n desprèn que l'àrea de  $\triangle ABC = 2 \times ST \times PS = 2 \times \frac{1}{2} \text{ base del triangle} \times \frac{1}{2} \text{ alçada del triangle}$
- Això demostra que l'àrea d'un triangle és la meitat de la base per l'alçada.

## 3. Propietats de reflexions i escales

- Els estudiants més grans han de fer les activitats i descobrir per si mateixos els fets geomètrics que s'hi demostren.
- Les línies de plegat són eixos de simetria (eixos de reflexió) i  $\triangle ABC$  és una ampliació de  $\triangle APQ$ . En la nostra vida, tots experimentem les reflexions en els miralls i l'escalat de formes en pantalles o a les ombres de les parets.

### Proves formals

- Els estudiants més grans han d'aprendre que les demostracions experimentals o particulars no són proves. Cal demostrar formalment que els resultats són exactament el que semblen, que els seus ulls no els enganyen i que aquests resultats es mantenen per a tots els triangles. (Consulta les solucions a les pàgines 3 i 4).
- Aquesta activitat es pot utilitzar per oferir als estudiants més grans l'experiència d'observar propietats geomètriques per si mateixos i la possibilitat posterior de redactar els seus raonaments formalment.

## APROFUNDIMENT

Trencaclosques de dos per dos <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-4-7-two-by-two-puzzle/>

Rectangles enters <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-5-8-wholesome-rectangles/>

Un quadrat és un rectangle? <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-5-10-is-a-square-a-rectangle/>

Suma d'angles: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-8-10-angle-sum/>

Conjunts similars <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/grades-8-to-10-simsets/>

Visita la web de [HelloMath!](#) per a més activitats de matemàtiques i computació per a primària.



- o **Visita** la web AIMING HIGH d'AIMSSEC (en anglès) per a més idees de sessions, enllaços i solucions: <http://aiminghigh.aimssec.ac.za>
  - o **Sucriu-te** al canal de YouTube MATHS TOYS <https://www.youtube.com/c/mathstoys>
  - o **Descarrega** la col·lecció completa de recursos d'AIMSSEC per a fer-la servir offline amb l'aplicació AIMSSEC de <https://aimssec.app> o ves a Google Play.
- Consulta <https://nrich.maths.org> per a més recursos de primària i secundària



© Toni Beardon sota Llicència Creative Commons BY-NC-SA 4.0